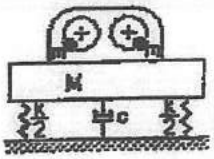
Exame de 2003-02-05
Parte teórica - 10 valores

O equipamento representado na figura possui dois discos que rodam em sentidos contrários com uma velocidade angular ω constante, e cujos centros de massa distam de e do seu centro de rotação. O sistema possui uma razão de amortecimento viscoso $\xi \cong 10\%$.



a) Caracterizar a excitação e o movimento vibratório do equipamento.

b) Representar o factor de amplificação dinâmica μ e o ângulo de fase ϕ em função da razão de frequência $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$. Indicar na figura o lugar geométrico dos valores correspondentes às frequências natural e de ressonância.

c) Representar a amplitude da força $f_T(t)$ transmitida ao apoios em função da razão de frequência $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$. Indicar na figura eventuais pontos notáveis.

d) Discutir a eficiência do isolamento em função dos parâmetros M, k e c para uma determinada frequência de funcionamento.

Os transdutores de vibração permitem medir o deslocamento ou a aceleração do estado vibratório de um sistema mecânico.

a) Indicar quais os elementos constituintes de um transdutor de vibrações e qual o seu princípio de funcionamento;

b) Representar as características de transmissibilidade e indicar as gamas de frequência de funcionamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.

c) Caracterizar, justificando, o atravancamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.

A análise do comportamento dinâmico de um sistema consiste na determinação das suas propriedades dinâmicas e/ou na determinação da resposta a determinado tipo de solicitação.

a) Definir função de resposta em frequência e indicar quais as variantes existentes.

b) Indicar e caracterizar sucintamente as principais formas de representação da função de resposta em frequência.

c) Definir espectro de reposta (ou de choque) e justificar a sua utilização em análise dinâmica de estruturas.

d) Justificar a utilização do modelo não amortecido do sistema com um grau de liberdade no estabelecimento de espectros de choque para diferentes transientes.

As equações do movimento de um sistema linear discreto não amortecido são do tipo $[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{f(t)\}$.

a) Definir coordenadas generalizadas e coordenadas naturais ou modais.

b) Caracterizar as matrizes de massa e de rigidez.

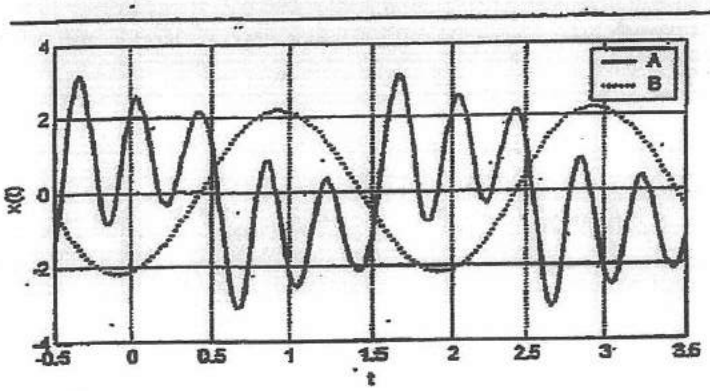
c) Definir modo natural e forma natural de vibração.

d) Indicar e escrever as propriedades mais relevantes dos vectores modais.

e) Sendo o vector $\{u\}_r$ uma das formas naturais de vibração, demonstrar que a resposta em regime livre a condições iniciais $\{q(0)\} = \{u\}_r$ e $\{\dot{q}(0)\} = \{0\}$ é uma oscilação harmónica de frequência ω_r e de configuração espacial $\{u\}_r$.

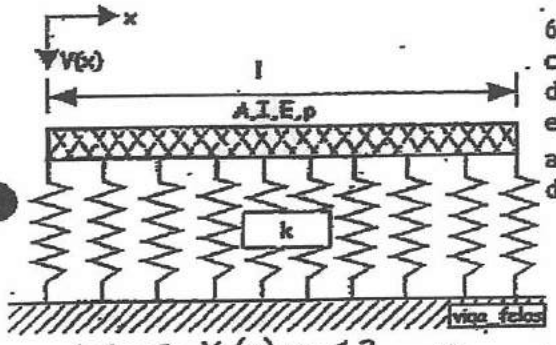
92

Exame de 2003-02-05
Parte teórica - 10 valores



5) A figura representa a resposta no tempo de dois sistemas vibratórios A e B distintos a uma mesma solicitação periódica,

a) Comentar.



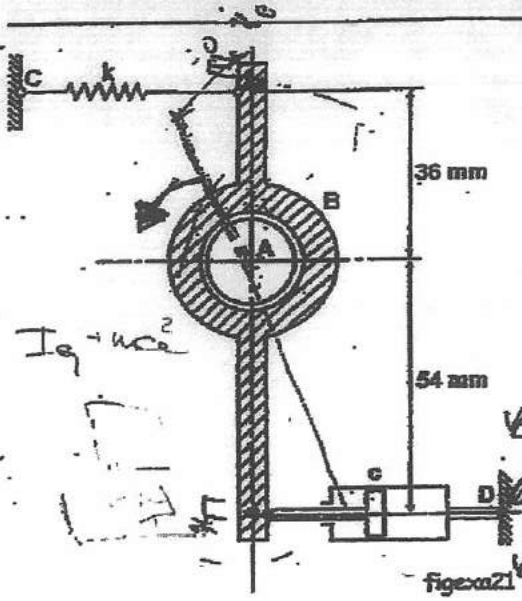
6) A figura representa uma viga de comprimento ℓ, cuja secção recta apresenta uma área A e momento de 2ª ordem I, e cujo material possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. A viga está apoiada sobre uma fundação linear elástica de rigidez distribuída e uniforme de valor k.

a) Estabelecer e caracterizar a equação diferencial do movimento do sistema.

b) Escrever as condições de fronteira que devem ser verificadas pelas formas naturais de vibração $V_r(x)\ r=1,2,\ldots,\infty$.

c) Estabelecer o problema característico associado cujas soluções constituem os modos naturais de vibração, $(\omega_r;V_r(x))\ r=1,2,\ldots,\infty$.

Exame de 2003-02-05
Parte prática - 10 valores

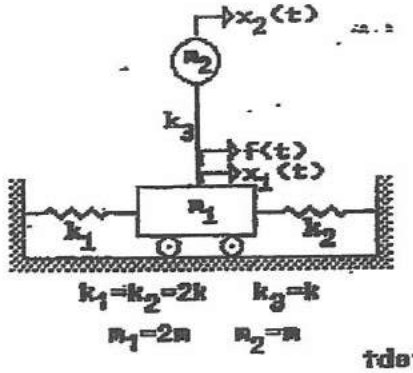


figexx21

1) O corpo representado na figura oscila em torno do ponto A, sendo o seu movimento controlado por uma mola linear de rigidez k e um amortecedor viscoso de constante c.
Num ensaio em regime livre, o sistema responde com uma vibração livre amortecida de frequência igual a 2 Hz, medindo-se os seguintes valores da vibração:
- 1ª oscilação: $\theta_1 = 10°$;
- 3ª oscilação: $\theta_2 = 0.62°$.

Sabendo que a rigidez da mola é de 126 Nm^{-1}, determinar:
a) o decremento logarítmico δ e a razão de amortecimento ξ;
b) a frequência natural angular não amortecida ω_n;
c) o momento de inércia I_A do corpo em relação ao eixo que passa pelo ponto A;
d) o valor da constante c do amortecedor;

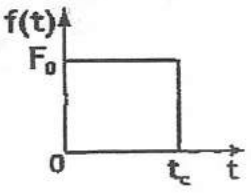
Admitindo que o sistema é excitado por um momento aplicado em A, $M_A(t) = M_m \cos(\omega t)$, com $M_m = 0.1$ Nm, determinar:
e) a frequência de excitação ω para a qual a amplitude de resposta é $\Theta(\omega) = 5°$.
f) a reacção no apoio A.



fdaf14

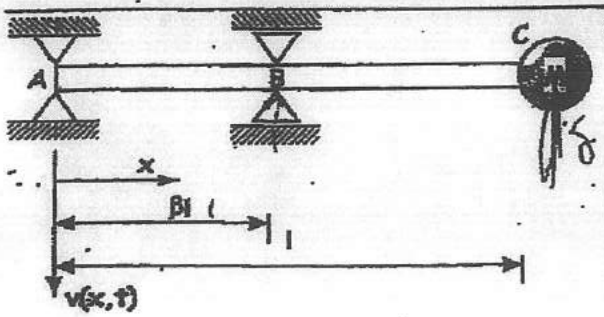
2) O sistema representado na figura é constituído por uma carruagem de massa m_1, ligada ao exterior por duas molas de rigidez k_1 e k_2, e que possui encastrada uma barra de rigidez à flexão k_3 na extremidade da qual está igualmente encastrada uma esfera de massa m_2.
As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelos deslocamentos absolutos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da carruagem e da esfera respectivamente.
a) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.
b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.
c) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.

Para $k = 200$ Nm^{-1} e $m = 2$ kg,



d) Determinar o valor máximo da resposta $x_1(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura com $t_c = 0.148$ s
e) Determinar a amplitude $X_1(\omega)$ da resposta da massa m_1 quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 14.4$ $rads^{-1}$.
f) Redimensionar a rigidez k_3 da barra de modo que a amplitude $X_1(\omega)$ da massa m_1 seja nula.

Exame de 2003-02-05
Parte prática - 10 valores



(3) A viga representada na figura encontra-se simplesmente apoiada em A e B, comporta uma massa concentrada M na extremidade C e possui uma secção recta uniforme de área A e de momento de 2ª ordem I. O material da viga possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ.
Pelo método da energia de Rayleigh e admitindo para a forma fundamental de vibração lateral (flexão) a deformada $V(x)=ax^2+bx+c$,

determinar:

a) as constantes a, b e c para um deslocamento lateral δ em $x=\ell$;
b) a energia potencial máxima e a energia cinética máxima;
c) a estimativa da frequência fundamental de vibração. Comentar o resultado.
d) Esboçar a variação da frequência fundamental para $\beta \in [0,1]$.
e) Discutir o resultado obtido na alínea anterior com M=0, para os valores limite β=1 e β=0. Comparar os valores obtidos com as respectivas frequências fundamentais exactas. Sugestão: exprimir o resultado da alínea anterior na forma $\omega=\omega_0 x f(\beta)$.
f) Sugerir uma função de aproximação de tipo harmónico para o problema.

c.f.

$v(0,t)=0$

$v(\beta l,t)=0$

$EI\dfrac{\partial^3 v(l,t)}{\partial x^3}=mg$

$EI\dfrac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2}=0$

Exame - 2003-02-05

Parte Teórica

4. a) As coordenadas generalizadas são coordenadas que descrevem o movimento de um sistema discreto, formando um vector que está projectado numa base qualquer.

As coordenadas modais ou naturais são as coordenadas generalizadas quando projectadas numa base modal, que é uma base formada pelos vectores modais.

b) Matriz de massa:
. É uma matriz simétrica;
. É uma matriz definida positiva (valores próprios > 0)

Matriz de rigidez:
. É uma matriz simétrica;
. É uma matriz, geralmente, definida positiva mas no caso de sistemas semi-definidos (que admitem movimentos de corpo rígido) passa a ser semi-definida positiva (valores próprios nulos e/ou positivos).

c) O modo natural é a solução do problema característico, constituindo-se por um par: frequência natural e forma natural. Representam um movimento harmónico síncrono a determinada ω.

A forma natural é a configuração espacial assumida pelo sistema quando este se encontra a vibrar em regime livre com uma frequência natural determinada.

d) . Ortogonalidade (ortonormalidade) entre os vários vectores modais relativamente à massa e à rigidez:

$$\{\phi\}_r^T [m] \{\phi\}_s = 0 \quad \text{para } r \neq s \quad \text{com } r, s = 1, \cdots, n$$

$$\{\phi\}_r^T [k] \{\phi\}_s = 0 \quad \text{para } r \neq s \quad \text{com } r, s = 1, \cdots, n$$

. Por serem ortogonais são linearmente independentes e portanto constituem uma base do espaço de dimensão n podendo definir qualquer vector nesse espaço.

e) $\{q(t)\} = \{u\} \cos(\omega t - \phi)$

Mas como se sabe pelo teorema de expansão, $\{q(t)\}$ pode ser definido como uma combinação linear dos modos naturais de vibração, logo:

$$\{q(t)\} = \sum_{i=1}^{n} c_i \{u\}_i$$

Com c_i definido como sendo:

$$c_i = \{\phi\}_i^T [m] \{q(t)\}$$

Mas $\{q(0)\} = \{u\}_r \overset{\text{pela prop. ortogonalidade}}{\Rightarrow} c_r = 1 \wedge c_i = 0, \; i \neq r$

Ficando:

$$\{q(t)\} = \{u\}_r$$

VD

Como por hipótese:

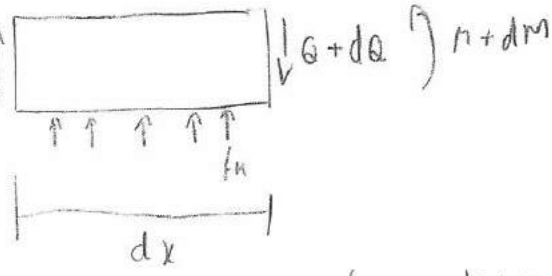
$$\{q(t)\} = \{u\} \cos(\omega t - \phi)$$

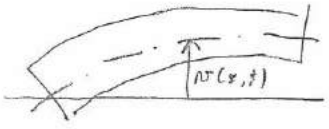
Então:

$$\{q(t)\} = \{u\}_1 \cos(\omega_1 t - \phi) \qquad \text{c.q.d.}$$

5. a) Uma solicitação periódica pode ser aproximada por um somatório de harmónicos (série de Fourier). Assim sendo, pelo princípio da sobreposição de efeitos, a resposta será obtida pelo somatório das respostas a cada um dos harmónicos. No caso da frequência de excitação de um dos harmónicos ser próxima da frequência natural do sistema há uma amplificação da influência da resposta a esse harmónico causando uma interferência nos harmónicos principais (os de frequências mais baixas), foi o caso do sistema A. No caso do B o harmónico principal já era o harmónico de resposta com a frequência natural mais próxima da frequência de excitação.

6. a)





$$f_K = K(x)\, w(x,t)\, dx$$

(Euler - Bernoulli)

$$\begin{array}{l} \overset{K_0}{\overset{\shortparallel}{\sum M = 0}} \\ \sum F^y = \dot{Q} \end{array} \begin{cases} -\cancel{M} + (\cancel{M} + dM) - (Q + \cancel{dQ})\,dx + \cancel{\left(K(x)\,v(x,t)\,dx\right)\frac{dx}{2}} = 0 \\ \cancel{Q} + K(x)\,v(x,t)\,dx - (\cancel{Q} + dQ) = \rho A(x)\,dx\,\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

Como: $dM = \dfrac{\partial M(x,t)}{\partial x}\,dx$ e $dQ = \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\,dx$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(x,t)}{\partial x}\cancel{dx} = Q\,\cancel{dx} \\ K(x)\,v(x,t)\,\cancel{dx} - \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\,\cancel{dx} = \rho A(x)\,\cancel{dx}\,\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ K(x)\,v(x,t) - \dfrac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = \rho A(x)\,\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

Pela Mecânica dos Sólidos: $M(x,t) = EI\,\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$, logo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right) + \rho A(x)\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = K(x)\,v(x,t)$$

c.q.d.

Caracterizar: É uma equação diferencial de 4ª ordem necessitando de 4 condições fronteira em x e 2 em t.

b) $$EI\,\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0,\ell} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\,\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0,\ell}\right) = 0$$

c) $v(x,t) = V(x)\, g(t) = V(x) \cos(\omega t - \phi)$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 V(x) \cos(\omega t - \phi)$$

Logo:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right) - \omega^2 \rho A(x) V(x) = k(x) V(x)$$

Em regime livre:

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right) = \omega^2 \rho A(x) V(x)}$$

↑ problema característico

Parte Prática

2. a)

Em. cinética:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Em. potencial:

$$V = \frac{1}{2} (K_1 + K_2) x_1^2 + \frac{1}{2} K_3 (x_2 - x_1)^2$$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = f(t) \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1) = f(t)$$

$$Q_2 = f(t) \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = (K_1 + K_2) x_1 - K_3 (x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = K_3 (x_2 - x_1)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2 + k_3) x_1 - k_3 x_2 = f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_3 x_1 + k_3 x_2 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) $\{x(t)\} = \{u\} \cos(\omega t - \phi)$

$$\begin{bmatrix} 5k - \omega^2 2m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5k - \omega^2 2m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1 \simeq 0{,}8481 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{V}$$

$$\text{V} \; \omega_2 \simeq 1{,}6676 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1ª forma natural:

$$\left(5k - 0{,}7192 \frac{k}{m}\right) u_1 - k u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{5 - \frac{0{,}7192}{m}} \cdot u_2$$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{5 - \frac{0{,}7192}{m}} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª forma natural:

$$\left(5K - 2{,}7809 \cdot \frac{K}{m}\right) u_1 - K u_2 = 0 \iff$$

$$\iff u_1 = \frac{1}{5 - \frac{2{,}7809}{m}}$$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{5 - \frac{2{,}7809}{m}} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c)

$$\{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_i^T [m] \{u\}_i}} \{u\}_i$$

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{0{,}004956\,(m - 0{,}09589)}{(m - 0{,}14384)^2} + 1{,}08\,m + 0{,}023014}} \begin{Bmatrix} \frac{1}{5 - \frac{0{,}7192}{m}} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{0{,}07424\,(m - 0{,}37079)}{(m - 0{,}55618)^2} + 1{,}08\,m + 0{,}08899}} \begin{Bmatrix} \frac{1}{5 - \frac{2{,}7809}{m}} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Para $m = 2$ kg:

$$\{\phi_1\} = \frac{1}{1{,}4784} \begin{Bmatrix} \frac{1}{5 - \frac{0{,}7192}{2}} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}1458 \\ 0{,}6764 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{1,5189}\begin{Bmatrix} \frac{1}{5-\frac{2,7809}{2}} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,1824 \\ 0,6584 \end{Bmatrix}$$

Então: $[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,1458 & 0,1864 \\ 0,6764 & 0,6584 \end{bmatrix}$ $\quad [\Phi]^T \{f(t)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8,481^2 & 0 \\ 0 & 16,676^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,1458\, f(t) \\ 0,6764\, f(t) \end{Bmatrix}$$

d)

1º gl: $T_{n,1} = \frac{2\pi}{8,481} \simeq 0,7409\ s > t_c$ → máximo: $2\frac{F_{01}}{k_{01}}\operatorname{sen}\frac{t}{2}$

2º gl: $T_{n,2} = \frac{2\pi}{16,676} \simeq 0,3768\ s > t_c$

$$\eta_{1,max} = 2 \times \frac{0,1458\ F_0}{8,481^2} \operatorname{sen}\left(\frac{8,481}{2} \times 0,148\right) \simeq 0,00238\ F_0$$

$$\eta_{2,max} = 2 \times \frac{0,6764\ F_0}{16,676^2} \operatorname{sen}\left(\frac{16,676}{2} \times 0,148\right) \simeq 0,00459\ F_0$$

Como: $\{x(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \Rightarrow X_1(w) = \overset{0,1458}{\phi_{11}}\ \eta_1 +$

$+ \overset{0,1864}{\phi_{12}}\ \eta_2$

Portanto, o que se pode garantir é que:

$$|X_1(t)|_{max} \leq \phi_{11}\,\eta_{1,max} + \phi_{12}\,\eta_{2,max} \simeq 0,00120\ F_0$$

e)

$$\begin{bmatrix} 1000 - 4\omega^2 & -200 \\ -200 & 200 - 2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1(\omega) = \frac{(200 - 2\omega^2)\, F}{(1000 - 4\omega^2)(200 - 2\omega^2) - 200^2}$$ ← expressão 9.19

Para $\omega = 14{,}4$ rad/s:

$$X_1(\omega) \cong 0{,}008215\, F \qquad [m]$$ N F obtiver em [N]

f) Voltando às letras:

$$\begin{bmatrix} m_1 = 2\,kg & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 = 2k = 200 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Então:

$$\begin{bmatrix} 800 + k_3 - 4\omega^2 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 - 2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1(\omega) = \frac{(k_3 - 2\omega^2)\, F}{(800 + k_3 - 4\omega^2)(k_3 - 2\omega^2) - k_3^2}$$

Objectivo: $X_1(\omega) = 0$ para $\omega = 14{,}4$ rad/s

Logo:

$$K_3 - 2 \times 14{,}4^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{K_3 = 414{,}72 \ N/m}$$

3. a) Cond fronteira geométricas:

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow a \underbrace{x^2}_{=0} + b \underbrace{x}_{=0} + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$V(x)\Big|_{x=\beta l} = 0 \Rightarrow a \beta^2 l^2 + b \beta l = 0 \Leftrightarrow b = -\beta l \cdot a$$

$$V(x)\Big|_{x=l} = \delta \Rightarrow a l^2 - (\beta l a) \cdot l = \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a (l^2 - \beta l^2) = \delta \Rightarrow a = \frac{\delta}{l^2(1-\beta)}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\delta}{l^2(1-\beta)} \\ b = -\dfrac{\delta \cdot \beta}{l(1-\beta)} \\ c = 0 \end{cases}$$

b)

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \cancel{V_{cfa}}^{=0} =$$

$$= \frac{EI}{2}\int_0^l 4a^2\, dx = \frac{EI}{2}\cdot 4a^2 l$$

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\,(V(x))^2\, dx + \frac{1}{2} M\, V(l)^2\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\cdot\left(\frac{a^2 l^5}{5} + \frac{1}{2}ab l^4 + \frac{1}{3}b^2 l^3\right) + \frac{1}{2} M \delta^2\right)$$

Com $\begin{cases} a = \dfrac{\delta}{l^2(1-\beta)} \\ b = -\dfrac{\delta\beta}{l(1-\beta)} \end{cases}$

c)

$$R(V(x)) = \omega^2 = \frac{\frac{EI}{\cancel{2}}\, 4a^2 l}{\frac{\rho A}{\cancel{2}}\left(\frac{a^2 l^5}{5} + \frac{abl^4}{2} + \frac{b^2}{3} l^3\right) + \frac{1}{\cancel{2}} M \delta^2} =$$

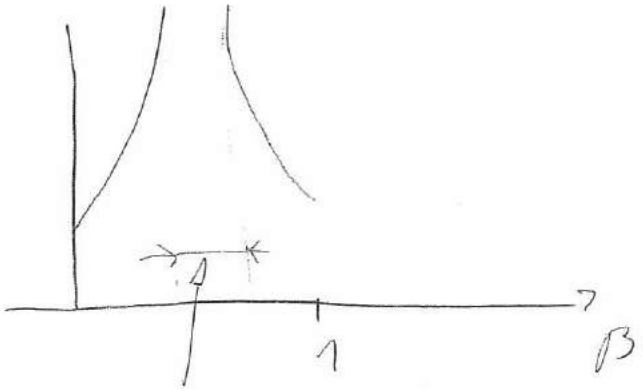
$$= \frac{EI}{\rho A l^4}\,\frac{4\,\frac{\delta^2}{l^4(1-\beta)^2}\, l}{\frac{\delta^2}{5l^4(1-\beta)^2} l - \frac{\delta^2\beta}{l^3(1-\beta)^2} + \frac{\delta^2\beta^2}{3l^3(1-\beta)^2} + \frac{M\delta^2}{\rho A l^4}} =$$

$$= \frac{EI}{\rho A l^4}\,\frac{4\cancel{l}}{\frac{\cancel{l}}{5} - \beta\cancel{l} + \frac{\beta^2\cancel{l}}{3} + \frac{(1-\beta)^2 M}{\rho A l}}$$

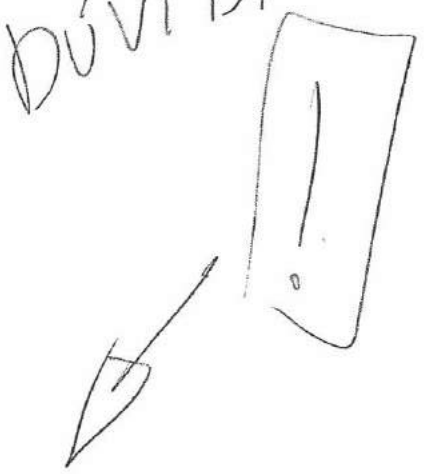
Comentário: De reparar que a estimativa da frequência fundamental depende da posição do apoio simples intermédio, βl

d)
$$\omega = \sqrt{R(V(x))} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{5} - \beta + \frac{\beta^2}{3} + \frac{(1-\beta)^2 M}{\rho A l}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

↑ massa da viga



Radicando negativo



Fiz mal qualquer coisa!

e) Não adianta ir pois está bem a anterior

f) $V(x) = a x - b \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right)$ tal que $\begin{cases} V(x)|_{x=l} = \delta \\ V(x)|_{x=\beta l} = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} — \\ a\beta l = b \operatorname{sen}(\pi\beta) \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \frac{b \operatorname{sen}\pi\beta}{\beta l} \cdot l = \delta \\ a = \frac{b \operatorname{sen}\pi\beta}{\beta l} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\delta \beta}{\operatorname{sen}(\pi\beta)} \\ a = \frac{\delta}{l} \end{cases}$$